**ממ"ן 13 אלגוריתמיקה**

**שאלה 1**

א. להלן הגרף:

ב.

לא קיים מסלול אוילרי

לפי הפתרון של אוילר בגרף קיים מסלול שעובר בכל קשת פעם אחת בדיוק (מסלול אוילרי) אם ורק אם הגרף קשיר ויש בו בדיוק 0 או 2 צמתים בעלי דרגה אי זוגית, בגרף המתאר את מערכת הגשרים בעיר קניגסברג יש 4 צמתים בדרגה אי זוגית (הדרגות של A,B,D הן 3 והדרגה של C היא 5) לכן לא קיים בו מסלול אוילרי.

קיים מסלול המילטוני

דוגמא למסלול המילטוני (בכחול(:

ג.

נסתכל על הגרף המתקבל לאחר מחיקת הקשתות שמסומנות באדום:



קיים מסלול אוילרי

קיבלנו גרף קשיר שבו יש 2 צמתים בדרגה אי זוגית (D,C) ושאר הצמתים (A,B) בדרגה זוגית לכן לפי הפתרון של אוילר קיים בגרף זה מסלול אוילרי.

לא קיים מסלול המילטוני

נשים לב שהצמתים A,B ו-D מחוברים עם קשתות רק לצומת C (וצומת C מחובר עם קשתות לכולם) לכן אם הגענו לאחד מהצמתים האלה במסלול מסוים זה בהכרח דרך הצומת C ואי אפשר להמשיך במסלול לצומת ששונה מ-C. המשמעות של זה היא שכל אחד מהצמתים האלו חייב להיות הצומת הראשון או הצומת האחרון בכל מסלול המילטוני אבל בגרף יש 3 כאלה מה שאומר שאי אפשר לשים את כולם כצומת הראשון או האחרון במסלול ולא קיים מסלול המילטוני.

**שאלה 2**

א.

יהי מספר טבעי N, נסמן את מספר הגורמים הראשוניים שלו ב k כך ש . המספר הראשוני הקטן ביותר הוא 2 כלומר לכל גורם ראשוני מתקיים (לכל ) *וקיבלנו ש לכן מה שאומר שמספר הגורמים הראשוניים של N הוא*

*ב.*

*נחשב את סכום כל המחלקים של 48, מתקיים*   *לפי השיטה המתוארת בשאלה סכום כל המחלקים הוא ואכן אם סוכמים את כל המחלקים מקבלים כלומר מהשיטה מתקבלת התוצאה הנכונה.*

*ג.*

מסמך האישור

*מסמך האישור יהיה פירוק של* X *לגורמים ראשוניים בצורה הבאה (כאשר לכל מתקיים ).*

*ניקח לדוגמא את* N=48, *ידוע ש- לכן* , .

*אלגוריתם אימות*

*האלגוריתם יחשב את סכום המחלקים לפי השיטה מסעיף ב’ ואז יבדוק אם התוצאה שווה ל*2N *(כי הסכום כולל את N עצמו).*

*(*1*)*

*(*2*) לכל* iמ1 עד K*:*

*(*2.1*)*

*(*3*)* אם sum == 2N החזר TRUE אחרת החזר FALSE

*האלגוריתם ניעזר במשתנה* sum *בשביל לחשב את מכפלת סכומי הסדרות ההנדסיות של הגורמים הראשוניים (כמו שמוצג בסעיף ב'). sum מאותחל ב1 בשביל שבאיטרציה הראשונה בלולאה (2) sum יקבל את סכום הסדרה ההנדסית של הגורם הראשוני הראשון, חישוב סכום הסדרות ההנדסיות מתבצע באמצעות הנוסחה הידועה ( כאשר במקרה שלנו ).*

*נכונות האלגוריתם נובעת מסעיף ב'.*

*זמן ריצה שורות 1 ו3 רצות בזמן קבוע והלולאה בשורה 2 רצה כמספר הגורמים הראשוניים ולפי סעיף א' מספר זה הוא כאשר (2.1) מתרחשת בזמן קבוע לכן זמן הריצה הכולל של האלגוריתם הוא וזהו זמן פולינמי לכן הבעייה שייכת לNP.*

**שאלה 3**

*א. רדוקציה פולינומית מבעיית הקליקה לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה*

*בהינתן גרף בלתי מכוון ניצור גרף בלתי מכוון חדש* כך ש ו-

*כלומר G' הוא הגרף המשלים של G, יש לו את אותם קודקודים כמו בG אבל כל קשת שקיימת בG לא קיימת בG' ובין כל שני קודקודים שונים שאין ביניהם קשת בG יש קשת בG'.*

*זמן ריצה*

*יצירת קבוצת הקודקודים V' מתרחשת בזמן קבועה כי היא זהה לV.*

*יצירת קבוצת הקשתות מתרחשת על ידי האלגוריתם הבא:*

*(1) עבור כל v קודקוד בV:*

*(1.1) צבע את v*

*(1.2) עבור כל קודקוד u בV:*

*(1.2.1) אם u לא צבוע והקשת* (u,v) *לא קיימת ב*E *הוסף את (*u*,*v*) ל-* E'

*האלגוריתם עובר על כל הזוגות האפשריים של הקודקודים ומוסיף קשת ביניהם ל-E' אם הקשת לא קיימת ב*E, *האלגוריתם משתמש בסימון קודקודים שהוא כבר עבר עליהם בשביל למנוע כפילויות וקשתות עצמיות.*

*הריצה על כל זוגות הקודקודים מתרחשת בוהבדיקה אם קשת נמצאת ב*E *ב ובסך הכל זמן הריצה הוא וזהו זמן ריצה פולינומי.*

נכונות

נראה שבG קיימת קליקה בגודל k אם ורק אם בG' יש קבוצה בלתי תלויה בגודל K.

**כיוון ראשון:** אם קיימת בG קליקה בגודל k אז נסמן אותה בB.

ולכל שני קודקודים שונים מתקיים לכן  *וקיבלנו ש*B *היא קבוצה בלתי תלויה בגודל* K *בG'.*

**כיוון שני:** אם קיימת *קבוצה בלתי תלויה בגודל* K *בG'* אז נסמן אותה בB.

ולכל שני קודקודים שונים מתקיים לכן  *וקיבלנו ש*B *היא קליקה בגודל* K *בG.*

*ב. רדוקציה פולינומית מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הכיסוי על ידי צמתים*

*טענה: בהינתן גרף בלתי מכוון נראה שקבוצת קודקודים היא בלתי תלויה אם ורק אם קבוצת הקודקודים היא כיסוי על ידי צמתים.*

**כיוון ראשון:** אם *היא בלתי תלויה בG אז לא קיימת קשת כך ש (שתי קצוותיה בS) לכן לכל קשת מתקיים (לפחות אחת מהקצוות ב) מה שאומר ש- היא כיסוי על ידי צמתים בG.*

***כיוון שני:*** *אם היא כיסוי על ידי צמתים בG אז לכל קשת מתקיים לכן בהכרח לא קיימת קשת כך ש מה שאומר שS בלתי תלויה בG.*

*מהטענה נקבל שבG יש קבוצה בלתי תלויה בגודל* K *אם ורק* אם יש *ב*G *כיסוי על ידי צמתים בגודל . אם S בלתי תלויה ו- אז כיסוי על ידי צמתים (לפי הטענה) ומתקיים ואותו רעיון עובד גם בכיוון ההפוך, אם קבוצת קודקודים בגודל שמהווה כיסוי על ידי צמתים אז נסמן , מתקיים לכן לפי הטענה S בלתי תלויה ו- .*

*ברדוקציה זו לא היינו צריכים לשנות את גרף הקלט (אלא רק את המספר הטבעי K) והראינו שאפשר לפתור את בעיית הקבוצה הבלתי תלויה באמצעות הפתרון ל בעיית הכיסוי על יד צמתים (וגם להיפך).*

**שאלה 4**

*נראה שהבעיה הנתונה היא* NP*-שלמה בעזרת רדוקציה פולינומית מבעיית הספיקות אליה וממנה אל בעיית הספיקות.*

*רדוקציה פולינומית מבעיית הספיקות לבעייה הנתונה*

*בהינתן פסוק ניצור פסוק נוסף , קל לראות שזמן היצירה הוא פולינומי וש- .*

*כעת נוכיח ש- ספיק אם ורק אם לפחות אחד מהפסוקים*  ספיק.

**כיוון ראשון:** אם ספיק אז ברור שלפחות אחד *מהפסוקים* ספיק.

**כיוון שני:** *הוא בהכרח לא ספיק כי לכל השמה של פסוקי יסוד או שערך האמת של הוא* T *ואז ערך האמת של הוא* F *ואז ערך האמת של הוא גם* F  *או שערך האמת של הוא* F *ואז ערך האמת של הוא* T *ואז ערך האמת של הוא* F*.*

*אם לפחות אחד מהפסוקים*  ספיק אנחנו יודעים בוודאות שזה לא לכן ספיק.

*רדוקציה פולינומית מהבעייה הנתונה לבעיית הספיקות*

*בהינתן שני פסוקים שונים ניצור פסוק חדש , קל לראות שזמן היצירה הוא פולינומי.*

*לפי הגדרת הקשר הלוגי או (שמסומן )*ספיק אם ורק אם *לפחות אחד מהפסוקים*  ספיק כלומר פתרון בעיית הספיקות עבור הפסוק (שיצרנו בזמן פולינומי) זהה לפתרון הבעיה הנתונה עבור שני *הפסוקים השונים* .

ידוע שבעיית הספיקות היא NP*-שלמה* לכן מהרדוקציות נקבל שגם הבעיה הנתונה היא NP*-שלמה (לפי עמוד 127 במדריך הלמידה בשביל להראות שבעיה נתונה* היא NP*-שלמה מספיק להראות רדוקציה ממנה לבעיה* NP*-שלמה ורדוקציה מבעיה* NP*-שלמה אליה).*

**שאלה 5**

*הצגת הבעיה בגרפים*

*ניצור גרף שבו כל קודקוד מייצג מרצה, נתון שלכל קורס יש בדיוק שני מרצים שיכולים ללמד אותו לכן אפשר לייצג כל קורס על ידי קשת כך שהקצוות שלה הן* המרצים שיכולים ללמד אותו. בניית הגרף דורשת זמן פולינומי (מספר הקודקודים שווה למספר המרצים (M) ומספר הקשתות שווה למספר הקורסים (N)).

הצגת הבעיה כבעיה בגרפים משמשת כרדוקציה פולינומית לבעיית הכיסוי על ידי צמתים. מציאת תת קבוצה בגודל K של מרצים כך שלכל קורס יהיה לפחות מרצה אחד שיכול ללמד אותו בתת קבוצה מקבילה למציאת תת קבוצה בגודל K של קודקודים ב Gכך שבכל קשת לפחות אחת הקצוות נמצאת בתת קבוצה, בעיה זו זהה לבעיית הכיסוי על ידי צמתים.

נראה שקיימת תת קבוצה בגודל K של מרצים כך שלכל קורס יהיה לפחות מרצה אחד בתת קבוצה שיכול ללמד אותו אם ורק אם בG קיים כיסוי על ידי צמתים בגודל K:

**כיוון ראשון:** אם בG קיים כיסוי על ידי צמתים בגודל K אז קיימת תת קבוצה כך שלפחות קצה אחד של כל קשת נמצא במכיוון שכל קשת מייצגת קורס והקצוות מייצגות את המרצים שיכולים ללמד אותו אז תת הקבוצה של המורים שמייצגים את הקודוקים במקיימת את התנאי שלכל קורס יש לפחות מרצה אחד שיכול ללמד אותו וכמובן שגם היא בגודל K.

**כיוון שני:** *אם* קיימת תת קבוצה M' בגודל K של מרצים כך שלכל קורס יהיה לפחות מרצה אחד בתת קבוצה שיכול ללמד אותו *אז תת הקבוצה של הקודקודים בG שמייצגים את המרצים בM' מקיימת את התנאי שלפחות קצה אחד של כל קשת שייך אליה (כי לכל קורס יש מרצה ב*M*') לכן היא מהווה כיסוי על ידי צמתים.*

הוכחה שהבעיה היא NP-שלמה

*מצאנו רדוקציה פולינומית מהבעיה הנתונה לבעיית הכיסוי על ידי צמתים שידוע שהיא* NP*-שלמה, כעת בשביל להראות שגם הבעיה הנתונה היא* NP-*שלמה מספיק למצוא רדוקציה פולינומית מבעיה שידועה כ*NP*-שלמה אליה (שוב, לפי עמוד 127 במדריך הלמידה).*

*נציג רדוקציה פולינומית מבעית הכיסוי על ידי צמתים לבעיה הנתונה*

*בהינתן גרף לא מכוון נייצר רשימה של מרצים בגודל כך שכל שכל מרצה מייצג קודקוד ורשימה של קורסים בגודל כך שכל קשת מייצגת קורס. בנוסף ניצור טבלה המפרטת אילו קורסים יכול ללמד כל אחד מהמרצים לפי הקשתות שמחבורות לקודקוד שהוא מייצג, כלומר עבור כל קודקוד וכל קשת שמחוברת אליו נוסיף את הקורס שמייצג את לרשימת הקורסים שהמרצה שמייצג את יכול ללמד. בגלל שלכל קשת יש שתי קצוות מתקיים התנאי שלכל קורס יהיו בדיוק שני מרצים.*

*יצירת קבוצת המרצים היא בסדר גודל של , יצירת רשימת הקורסים*  ויצירת טבלת הקורסים (כי סכום דרגות הקודקודים בכל גרף הוא 2|E|) לכן זמן היצירה הוא פולינומי.

*כעת אפשר להראות עם אותה הוכחה מהרדוקציה הקודמת* שקיימת תת קבוצה בגודל K של מרצים כך שלכל קורס יהיה לפחות מרצה אחד בתת קבוצה שיכול ללמד אותו אם ורק אם בG קיים כיסוי על ידי צמתים בגודל K *וכך נקבל שהבעיה הנתונה היא* NP*-שלמה.*